Schwingung einer gezupften Saite

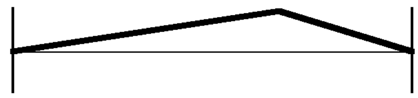
Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, Rämistr. 54, 8001 Zürich

Am VSMP-Kongress über Musik, Physik und Mathematik vom 1.-5. Nov. 1999 in Locarno führte uns H.-J. Meyer von der Kantonsschule Romanshorn in einem wunderschönen Experiment die Bewegung einer gestrichenen Cellosaite vor. Er hat u. a. die Schwingung mit einem Stroboskop sichtbar gemacht. Der Versuch ist teilweise im Band "Die Physik der Musikinstrumente" vom Spektrum Verlag (1988) beschrieben. Da meine Neugier geweckt war, versuchte ich, den einfacheren Fall einer gezupften Saite rechnerisch anzupacken. Nehmen wir an, am Anfang sei die Saite "dreieckförmig" wie in Fig. 1 gezeichnet und in Ruhe. Die Bewegung der Saite kann dann als Überlagerung von laufenden Wellen oder von Eigenschwingungen betrachtet werden. Die Rechnung lässt sich mit moderatem Aufwand durchführen, wenn man Dämpfung, Steifheit der Saite und andere störende Effekte vernachlässigt. Leider konnte ich das Resultat noch nicht am Experiment testen, denn man müsste eine Momentaufnahme einer schwingenden Saite machen können. Der Trick, die Bewegung mit einem Stroboskop zu "verlangsamen", hat nicht funktioniert. Aber ich konnte mein Resultat in der Literatur finden.

Figur 1: Anfangsauslenkung der Saite

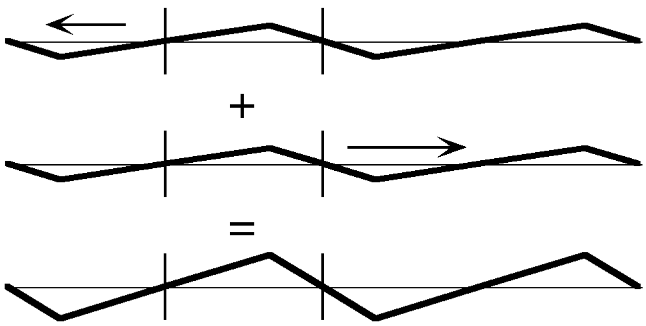
$y(x) = x \cdot a/s$ für $0 \le x \le s$

$y(x) = a \cdot (L-x)/(L-s)$ für $s \le x \le L$ (hier: $s = 2L/3$)

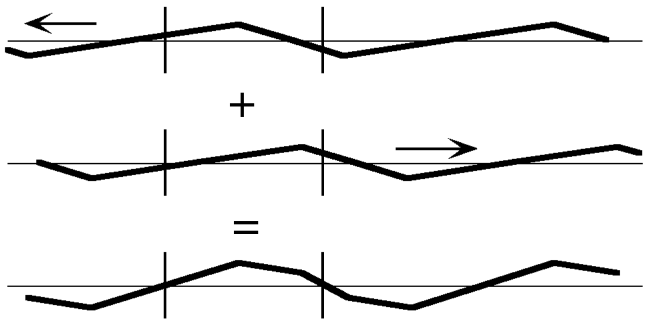


a: maximale Auslenkung; s: Position der Auslenkung; L: Länge der entspannten Saite. ($v_0 = 0$)

1. Überlagerung laufender Wellen



Figur 2: Wir zerlegen den Anfangszustand von Fig. 1 gedanklich in eine links- und eine rechtslaufende Welle gleicher Form. Die Randbedingung $y(0) = y(L) = 0$ kann erfüllt werden, indem wir die Wellen geeignet "antisymmetrisch" periodisch fortstetzen.



Figur 3: Betrachtet man die laufenden Wellen von Fig. 2 etwas später, hier nach 1/10 Periode, so stellt die Überlagerung den Zustand der Saite zum jeweiligen Zeitpunkt dar.

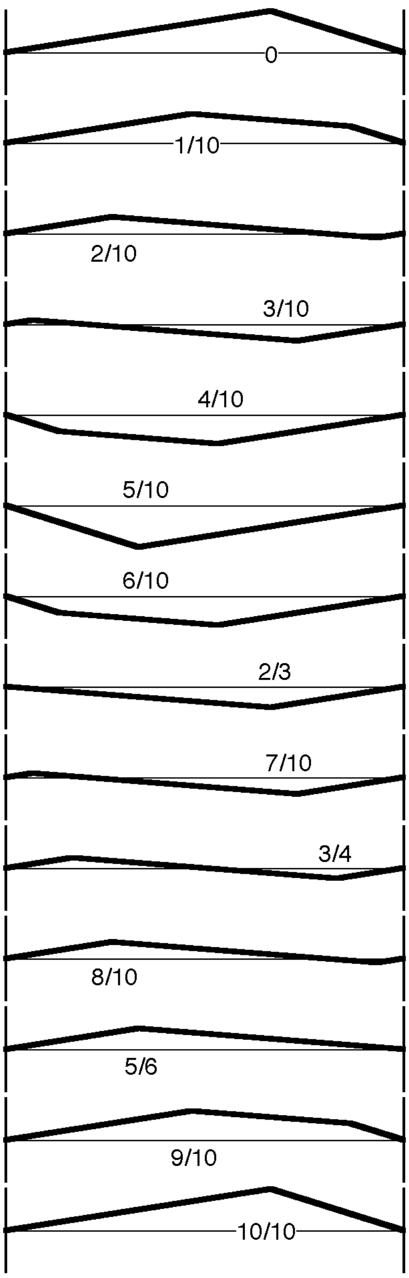
Die Auslenkung ist in allen Darstellungen übertrieben gross gezeichnet.

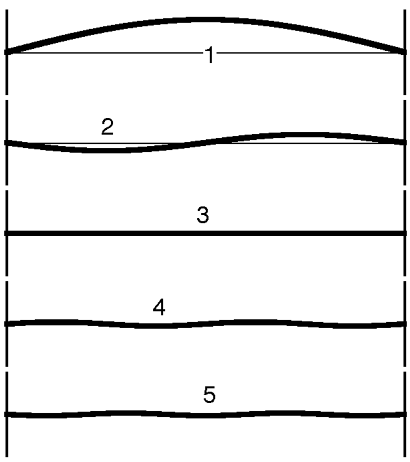
2. Überlagerung von Eigenschwingungen

Die Bewegung setzt sich aus Eigenschwingungen (stehende Wellen) wie in Figur 4 zusammen. Die Amplituden der Eigenschwingungen werden durch Fourieranalyse des Anfangszustands bestimmt. Dazu muss man den Anfangszustand wie in Figur 2 periodisch fortsetzen, da die Saitenlänge nur die halbe Periodenlänge ist (Fig. 4 oben). Die Frequenzen der Eigenschwingungen sind Harmonische der Grundfrequenz. Man erhält:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot a}{s\cdot(L-s)} \; \frac{\sin(n\cdot k\cdot s)}{(n\cdot k)^2} \;\; \sin(n\,k\,x)\;\; \cos(n\,\omega\,t).$$

$$k = \frac{2\pi}{2L} \;\; ; \;\; \omega = \frac{2\pi}{T} \;\; ; \;\; \text{T: Periodendauer der Grundschwingung}$$





Figur 4 (oben): Zerlegung des Anfangszustands y(x,0) in Eigenschwingungen. Nummer 1 entspricht der Grundschwingung. Eigenschwingungen mit Nummern über 5 wären in dieser Darstellung fast unsichtbar.

Figur 5 (links): Die Schwingung zu einigen Zeitpunkten, berechnet mit der Fourierreihe. Beigefügt ist die Zeit in Einheiten der Periodendauer.

Figur 6 (unten): Die Überlagerung aller Zustände von Fig. 5 ergibt ein Parallelogramm.